NOMBRES COMPLEXES

COMPLEXES

1 Prouver que si $|u| = |v| = 1$ alors $\dfrac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$

2 Prouver que si a, b, c sont de module 1 alors
$$|ab+bc+ca| = |a+b+c|.$$

calculs stupides

♣ **3** Calculer

(a) $\dfrac{i-7}{3+7i}$ (b) $\dfrac{2+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{2+i}$ (c) $\dfrac{3+2i}{7-2i}$

(d) $\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$ (e) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$ (f) $\dfrac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{1-i}$

(g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}\right)^2$ (h) $\dfrac{(1+i)^2}{(1+2i)^3}$ (i) $\dfrac{i-7}{3+7i}+\dfrac{1-i}{1+i}$

(j) $\dfrac{3+4i}{5-7i}$ (k) $\dfrac{(2+i)(3-i)}{4i}$ (l) $\dfrac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)}$

4 Résoudre $\begin{cases} 2ix+y &= 2i \\ 3x-iy &= 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3ix+y &= 8+i \\ 2\bar{x}+i\bar{x} &= 1+i \end{cases}$
$\begin{cases} (1+i)x+iy &= 2-i \\ (2-i)x+(3-i)y &= 5+3i \end{cases}$

5 Calculer
$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+ai} \quad \text{et} \quad \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}i}$$

6 Simplifier

(a) $(a+1+i)(a-1+i)(a-1-i)(a+1-i)$

(b) $(x+i)(x+2-3i)(x-i)(x-2+3i)$

(c) $(3b+4+5i)(3b+4-5i)$

7 Calculer $\left|\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{2ab}}{a-b+2i\sqrt{ab}}\right|$

♣ **8** Déterminer z pour que $(z-2)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R}$.

9 En étudiant le quotient de $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$ par $1-i$, calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

♢ **10** Calculer

a) $\dfrac{(1+i)^{15}(\sqrt{3}-i)^5}{(-1+i\sqrt{3})^{10}(-2-2i)^2}$

b) $\dfrac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^4(1-i\sqrt{3})^{11}}$

c) $\dfrac{(1-i)^7(-\sqrt{3}-i)^{12}}{(1+i)^{15}}$

d) $\dfrac{(1+i)^{124}}{(1-i)^{98}-i(1+i)^{98}}$

11 Calculer

a) $(6-\frac{1}{5}\sqrt{60}i)(\sqrt{8}i-\sqrt{18}i+4)$
$\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}i+\sqrt{2}i\right)+5(\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{27}{5}}i+2)\right)$

b) $\dfrac{2(\sqrt{5}i+\sqrt{3}i)^3(\sqrt{15}-4)(\sqrt{3}i+i)(1-\sqrt{3})}{(7+5\sqrt{2})(\sqrt{2}i-i)^3}$

♡ **12** Déterminer deux réels a, b tel que
$$a\frac{1+ib}{1-ib} = re^{i\theta}$$

13 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1}{1+i\tan\alpha}$; (construire le cas $\alpha = 2\pi/3$) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$; $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}$; $\dfrac{[\cos a+i(1+\sin a)]^3}{1-\sin 3a+i\cos 3a}$.

14 On pose $z_1 = 1-i$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$. calculer le module et l'argument et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

♣ **15** Prouver que
$$1 \leqslant |1+a|+|a+b|+|b+c|+|c|.$$

♢ **16** Prouver que

a) Si $|z| = 1$ et $z \neq -1$ alors $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $|a| = |b| = 1, 1+ab \neq 0$ alors $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

c) $a \neq b$ et ($|a|$ ou $|b| = 1$) $\Longrightarrow \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$.

d) $|u+iv| = u^2+v^2 \Longrightarrow u+iv = 0$ ou $u, v \in \mathbb{R}$.

e) $|a| = |b| = |2+ab| = 1 \Longrightarrow ab = -1$.

♢ **17** Prouver que $z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P} = \{z \Im z > 0\}$ sur $\mathcal{D} = \{z\ |z| < 1\}$.

♣ **18** Prouver que si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|z| = 1$ on a $|z-\alpha| \geqslant \dfrac{1+\alpha}{2}|z-1|$.

♣ **19** Prouver que si $|a| = |b| = 1$ on a pour tout z
$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

♡ **20** **a)** Etablir qu'une CNS pour que$x, y, z \in \mathbb{C}$soit en progression géométrique est
$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2+y^2+z^2.$$

b) Déterminer x, y, z connaissant leur somme a et celle de leur carré b^2.

c) Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ discuter de l'existence de solution dans $\mathbb{R}$ et représenter leur ensemble.

d) $a = 21, b^2 = 189$.

21 Calculer la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$ En calculant $cos5x$. En écrivant $1 = 3-2$.

♡ **22** Calculer

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

Demst: $= S = -S'$ *où* $S' = \sum$ *pair,* $1+S+S' = 1$ $S-S'$ *=géom=-1*

23 Résoudre en θ réel l'équation

$$\prod_1^n(\cos k\theta + i\sin k\theta) = 1.$$

♡ **24** Trouver les racines carrés de : $j, 1-2i\sqrt{2}, -3+4i, 1+4i\sqrt{3}, 9+40i, 5+12i, 40-42i, 7-24i$.

25 Trouver les racines cubiques de $-i, 1+i, -2+2i, 11+2i, 18+26i$ et de $4\sqrt{2}(1+i)$ et $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

♡ **26** Racines 4-eme de $24i-7, 28-96i, 2-i\sqrt{12}$,

♡ **27** Calculer $(2\sqrt{3}+i)^3$ et résoudre $z^3 = 18\sqrt{3}-35i$.

♡ **28** Résoudre et représenter dans le plan l'ensemble des z tels que

$$z^3\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad z^3\leqslant 8.$$

29 **(DS)** Soit le nombre complexe

$$Z = 8a^2-(1+a^2)^2+4a(1-a^2)i.$$

a) Calculer son module. On note α son argument. Calculer $\sin\alpha$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha\sin\alpha$.

b) Prouver que

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{a+1}{\sqrt{2(1+a^2)}} \qquad \sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1-a}{\sqrt{2(1+a^2)}}$$

c) En déduire les racines quatrième de Z.

CALCUL DANS $\mathbb{C}$

♡ **30** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit des carrés sur les cotés; Montrer que les milieux des centres de ces carrés sont sur un carré.

31 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\sum z_i\right| = \sum|z_i|.$$

On procédera par récurrence.
Application : Prouver qu'un zéro $\neq 1$ de $1+X+\cdots+X^{n-1}-nX^n$ est de module <1.

32 Démontrer les propriétés suivantes :

(a) $\quad |z|+|z'|\leqslant|z+z'|+|z-z'|$

(b) $\quad \operatorname{Re} z<\frac{1}{2}\iff\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$

(c) $\quad |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|\leqslant|z|\sqrt{2}$

(d) $\quad |z|=1\Longrightarrow|1+z|\geqslant 1$ ou $\left|1+z^2\right|\geqslant 2$

$ildoityavoirunefaute$ (e) $\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)<\frac{1}{2}\Longrightarrow|z|>1$

(f) $\quad \forall z \quad |1+z|\geqslant\frac{1}{2}$ ou $\left|1+z^2\right|\geqslant 1$

(g) $\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0\Longrightarrow|1+z|\geqslant 1$ $\qquad (h)$ $\quad |z|\leqslant|z|^2+|z-1|$

(i) $\quad \forall z \quad |1+2z|\geqslant 1$ ou $\left|1+z+z^2\right|\leqslant 1$

Demst: *poser* $a=-x-x^2$, *n se ramène à* $Y^2-(2a+1)Y+(1-a)^2\leqslant 1$ *avec* $0<Y<a$

♢ **33** Prouver que $z\longmapsto\dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathcal{P}=\{z\Im z>0\}$ sur $\mathcal{D}=\{z\ |z|<1\}$.

♢ **34** $|a|=|b|=|c|=1$, prouver que $\dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}\in\mathbb{R}$.

♡ **35** Déterminer $\operatorname{Sup}_{|z|=1}\left|z^3+2z\right|$

♡ **36** Prouver $2|a||b||a-b|\leqslant(|a|+|b|)\,|a|b|-b|a||$.

Demst: *on se ramène à un barycentre entre cmplx de module 1 et coef* $|a|\,/\,|a|+|b|$ *qui dit que la distance de 0 à la corde est au milieu. Après div par* $|ab|$ *ça dit que ds un trapèze isocèle la longueur du milieu est* $\leqslant$ *la diagonale. creux car c'est dire* $b=a\alpha e^{i\theta}$ *et on se ramène à* $\left|1-e^{i\theta}\right|(1+\alpha)/0\leqslant\left|1-\alpha e^{i\theta}\right|$ *le qnu donne* $\cos\theta\geqslant -1$.

♢ **37** **a)** Prouver $|a-b|=|a||b|\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|$.

b) En déduire $|y||x-z|\leqslant|z||x-y|+|x||y-z|$.

c) En déduire l'inégalité de Ptolémée

$$AB\cdot CD\leqslant AC\cdot BD+AD\cdot BC.$$

♢ **38** **a)** Prouver $|y||x-z|\leqslant|z||x-y|+|x||y-z|$.

b) En déduire l'inégalité de Ptolémée

$$AB\cdot CD\leqslant AC\cdot BD+AD\cdot BC.$$

♡ **39** On suppose que $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n=1$ avec $n\geqslant 2$. On pose $S=\sum_1^{n-1}C_n^k(2-i)^k(2i)^{n-k}$.

a) Prouver l'existence de deux entiers A, B tel que $S=(2-i)(A+iB)$.

b) Simplifier S et obtenir une absurdité.

GÉOMÉTRIE

40 A quelle condition les nombres suivants sont-ils : réel, imaginaire pur a) $\dfrac{z-2}{z-1}$ b) $\dfrac{z-2}{z-4i}$ c $(a+ib^2)^3$ d) $\dfrac{z-i}{z+i}$ e) $\dfrac{z+4i}{z-4i}$

41 A quelle condition $(x+iy)^3$ est-il réel et $\geqslant 8$? Même question avec $(\sqrt{x}+i\sqrt{y})^6$.

$\boxed{42}$ Trouver les u tels que $|u^2| - |1-u| = |u|$.
Idem avec $|u-i| = |iu-i| = |u-ui|$

♣ $\boxed{43}$ Prouver que si un coté d'un carré est à coordonnées entières, l'autre l'est également.

♢ $\boxed{44}$ **a)** Soit trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c. Prouver que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

b) En déduire qu'il est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0.$$

c) Prouver que les centres de gravité de trois triangles équilatérals construits sur les coté d'un triangle quelconque forment un triangle équilatéral.

$\boxed{45}$ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que

j, z, jzsoient alignés

$1, z, \dfrac{1}{z}, 1-z$ soient cocycliques

z, z^2, z^5 soient alignés

z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle

$1, z, z^3$ soient alignés

Demst: *a) cercle centre 1/2,$\sqrt{3}/2$ rayon 1.*
b) Ox et le cercle $(1/2, 0)r = \sqrt{3}/2$
c)Ox et l'hyperbole $y^2 = 3x^2 + 2x + 1$.
d) selon où es le droit : $Oy \cup x = -1 \cup C(-1/2, 0)$

$\boxed{46}$ **a)** Trouver l'image de la droite des imaginaires par $z \longrightarrow (z-1)^2$.

b) Idem avec le cercle unité.

c) Image de U par $z \longrightarrow \frac{1}{1+z+z^2}$

$\boxed{47}$ Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) z, i, iz soient alignés.

b) z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle.

c) $1, z, z^3$ soient alignés.

d) O soit le centre du cercle inscrit dans le triangle z, z^2, z^3.

e) $z, z^2, 1-z$ ait même module.

f) idem avec $z-i, z-iz, iz-i$

$\boxed{48}$ Trouver l'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{a+i}{a-1+2i}$ soit de module 1 ; ou dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{49}$ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe tels que

a) $|z-3i| = 5$.

b) $\dfrac{|z-i|}{z+2i} = 2$.

c) $\frac{z-2}{z-6}$ ait des composantes égales.

d) $\dfrac{1+z}{\bar{z}}$ soit réel, soit imaginaire pur.

e) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

f) $\dfrac{z-2}{z-6}$ soit imaginaire pur. (On démontrera de plus qu'il existe β tel que $\left|1 - \frac{\beta}{z}\right|$ soit indépendant de z. En calculer la valeur ainsi que celle de β.)

Demst: *$AM.BM = 0$ donc cercle diam $A = 2$ $B = 6$. $\beta = 16/3$ valeur = 1/4*

$\boxed{50}$ Trouver les z pour que $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{51}$ Nature et éléments caractéristique des transformations :

(a) $2z - i$ (b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z - 1 + i$ (c) $(\sqrt{3} - i + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$
(d) $(1+i)\bar{z} - i$ (e) $i\bar{z} + 1 - i$
(f) $\dfrac{4-3i}{5}(\bar{z} + 1 - i) - 1 + i$ (g) $(2-i)\bar{z} + 4i$
(h) $(1-i)\bar{z} + 4i + 1$ (i) $i\sqrt{2}\bar{z} + 1 - i\sqrt{2}$

$\boxed{52}$ Soit la transformation plane

$$z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

a) La caractériser géométriquement.

b) Donner les coordonnées de z'.

c) Déterminer la transformée de la droite passant par $A(1 - 2\sqrt{3}, 0)$ et de vecteur directeur $(\sqrt{3}, 1)$. (On procédera de deux façons).

$\boxed{53}$ Pour $k > 0$ on définit T_k par $z' = kiz + 1 + k^2$.

a) Nature de T_k ; donner en particulier son unique point invariant ω_k.

b) Quel est l'ensemble des ω_k lorsque k varie.

c) Prouver que deux T_k distincts ne commutent jamais.

d) Identifier ${T_k}^2$.

$\boxed{54}$ Soit A d'affixe 2, M d'affixe $5 + 2i$ et L la droite perpendiculaire en A à AM.

a) Soit N le symétrique de M par rapport à A ; Soit M_1, M_2 les points de L tels que

$$\|AM_1\| = \|AM_2\| = \|AM\|.$$

Calculer les affixe n, m_1, m_2 de N, M_1, M_2.

b) Soit M' tel que $\|AM'\| = 2\|AM\|$ et $(AM, AM') = 4\pi/3$. Calculer son affixe.

c) Calculer l'affixe de n' symétrique de M' par rapport à L.

$\boxed{55}$ Soient a, b, c, λ, μ des réels, M' et M" les affixes de z', z" racines de l'équation

$$z^2 - 2(\lambda + i\mu)z + 2a\lambda + 2b\mu + c = 0$$

a) Trouver une condition pour que le milieu de $[z', z"]$ soit situé sur les axes.

b) On suppose $-a^2 < c < b^2$, $c \neq 0$. Déterminer la bissectrice de $OM', OM"$;

c) Montrer que il existe 4 valeurs $\lambda + i\mu$ telles que $z' = z"$, et trouver une propriété géométrique des points $M' = M"$ correspondants.

d) Déterminer Ω pour que les bissectrices de $\Omega M', \Omega M$" soient indépendantes de λ et μ.