



Mardi 10 juillet 2012

G1

Problème 1. Soit ABC un triangle et J le centre de son cercle exinscrit opposé au sommet A . Ce cercle est tangent au côté $[BC]$ en M et aux droites (AB) et (AC) , respectivement, en K et L . Les droites (LM) et (BJ) se coupent en F et les droites (KM) et (CJ) se coupent en G . Soit S le point d'intersection des droites (AF) et (BC) et soit T le point d'intersection des droites (AG) et (BC) .

Montrer que M est le milieu du segment $[ST]$.

(Le cercle *exinscrit* du triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB]$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC]$ au-delà de C)

A3

Problème 2. Soit $n \geq 3$ un entier et soit a_2, a_3, \dots, a_n des nombres réels strictement positifs tels que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Montrer que :

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

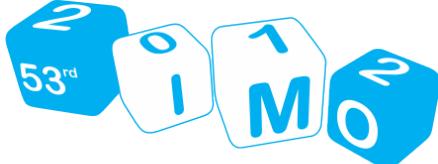
C6

Problème 3. La *devinette du menteur* est un jeu joué par deux joueurs A et B . Les règles du jeu dépendent de deux entiers strictement positifs k et n , connus par chacun des deux joueurs.

Au début du jeu, le joueur A choisit deux entiers x et N vérifiant $1 \leq x \leq N$. Le joueur A garde x secret et, honnêtement, communique N au joueur B . Le joueur B essaye d'obtenir des informations concernant x en posant au joueur A des questions comme suit : pour chaque question, B choisit un ensemble arbitraire d'entiers strictement positifs S (éventuellement déjà choisi pour une question antérieure) et demande à A si x appartient à S ; le joueur B peut poser autant de telles questions qu'il le souhaite. Après chaque question, le joueur A doit immédiatement répondre par *oui* ou *non*, mais il a le droit de mentir autant de fois qu'il le souhaite ; la seule restriction étant que parmi toutes $k + 1$ réponses consécutives, au moins l'une de ces réponses doit être la vérité.

Après que B ait posé autant de questions qu'il le souhaite, il doit proposer un ensemble X contenant au plus n entiers strictement positifs. Si x appartient à X , alors B gagne, sinon, il perd. Montrer que :

1. Si $n \geq 2^k$, alors B dispose d'une stratégie gagnante.
2. Pour tout entier suffisamment grand k , il existe un entier $n \geq 1.99^k$ tel que B ne dispose pas de stratégie gagnante.



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: French

Day: 2

Mercredi 11 juillet 2012

A1 **Problème 4.** Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers a, b, c vérifiant $a + b + c = 0$, on ait l'égalité suivante :

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs)

G5 **Problème 5.** Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BCA} = 90^\circ$, et soit D le pied de la hauteur issue de C . Soit X un point intérieur au segment $[CD]$. Soit K le point du segment $[AX]$ tel que $BK = BC$. De même, soit L le point du segment $[BX]$ tel que $AL = AC$. Finalement, soit M le point d'intersection des droites (AL) et (BK) .

Montrer que $MK = ML$.

N7 **Problème 6.** Trouver tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe des entiers positifs ou nuls a_1, a_2, \dots, a_n tels que :

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: French

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes

Chaque problème vaut 7 points