IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

French (fre), day 1

*Mardi 18 juillet 2017*

N1 **Problème 1.** Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0$, $a_1$, $a_2$, … par :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ est un entier,} \\ a_n + 3 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Déterminer toutes les valeurs de $a_0$ pour lesquelles il existe un nombre $A$ tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de $n$.

A6 **Problème 2.** Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels $x$ et $y$ :

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

C5 **Problème 3.** Un lapin invisible et un chasseur jouent dans le plan Euclidien. La position initiale $A_0$ du lapin et la position initiale $B_0$ du chasseur coïncident. Après $n-1$ tours de jeu, le lapin se trouve au point $A_{n-1}$ et le chasseur au point $B_{n-1}$. Lors du $n^{\text{ème}}$ tour de jeu, trois évenements successifs se produisent :

(i) le lapin se déplace sans être vu jusqu'en un point $A_n$ tel que la distance entre $A_{n-1}$ et $A_n$ est égale à 1 ;

(ii) un système de localisation indique un point $P_n$ au chasseur, avec pour seule garantie que la distance entre $P_n$ et $A_n$ ne dépasse pas 1 ;

(iii) le chasseur se déplace de manière visible jusqu'en un point $B_n$ tel que la distance entre $B_{n-1}$ et $B_n$ est égale à 1.

Est-il toujours possible pour le chasseur que, quels que soient les déplacements du lapin et les points indiqués par le système de localisation, il puisse choisir ses déplacements de sorte qu'après $10^9$ tours de jeu, il soit certain que la distance entre lui et le lapin ne dépasse pas 100 ?

*Language: French*

*Durée: 4 heures et 30 minutes*
*Chaque problème vaut 7 points*

*Mercredi 19 juillet 2017*

G2 **Problème 4.** Soit $R$ et $S$ des points distincts appartenant à un cercle $\Omega$ tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre de $\Omega$. Soit $\ell$ la tangente à $\Omega$ en $R$. Le point $T$ est tel que $S$ est le milieu du segment $[RT]$. Le point $J$ est choisi sur le plus petit arc $\widehat{RS}$ de $\Omega$ de sorte que le cercle $\Gamma$ circonscrit au triangle $JST$ rencontre $\ell$ en deux points distincts. Soit $A$ le point commun de $\Gamma$ et $\ell$ qui est le plus proche de $R$. La droite $(AJ)$ recoupe $\Omega$ en $K$. Prouver que la droite $(KT)$ est tangente à $\Gamma$.

C4 **Problème 5.** Soit $N \geqslant 2$ un entier. Les $N(N+1)$ joueurs d'un club de football, tous de tailles différentes, sont placés en ligne. Clara souhaite exclure $N(N-1)$ joueurs de cette ligne afin que la ligne résultante formée par les $2N$ joueurs restants satisfasse aux $N$ conditions suivantes :

(1) il n'y a personne entre les deux plus grands joueurs,

(2) il n'y a personne entre le troisième et le quatrième plus grand joueur,

$\vdots$

($N$) il n'y a personne entre les deux plus petits joueurs.

Montrer que son souhait est toujours réalisable.

N7 **Problème 6.** Une paire ordonnée $(x, y)$ d'entiers est appelée *point primitif* si le plus grand diviseur commun de $x$ et $y$ est égal à 1. Un ensemble fini de points primitifs $S$ étant donné, prouver qu'il existe un entier strictement positif $n$ et des entiers $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ tels que, pour tout $(x, y)$ appartenant à $S$, on ait :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$