PROBABILITE

Il est facile d'imaginer que si déjà avec un chapitre aussi convenu que l'équation du second degré, on obtient de pareils délires, le chapitre des probabilités qui est hautement délicat, relève du cirque et du numéro de music-hall.

Cela commence dès la classe de seconde. On trouve en effet la notion d'intervalle de fluctuation sur laquelle nous reviendrons car elle relève de la folie pure à ce niveau (classe de seconde !). On y voit une jolie racine carrée, sauf que … la fonction racine carrée est du programme de première ! ! La seule connaissance que les élèves en ont est…la calculatrice bien sûr.

Propriété et définition *propriété admise et non exigible*

- Lorsqu'on prélève un échantillon de taille n dans une population où la fréquence d'un caractère est p, alors sous certaines conditions*, la probabilité que cet échantillon fournisse une fréquence appartenant à l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est au moins égale à 0,95.
- I est appelé **intervalle de fluctuation de la fréquence f au seuil de 95 %.**

Grandiose ! L'exception pédagogique française ! Cela porte un nom en français, cela se nomme « mettre la charrue avant les bœufs » ; et l'on pourrait même ajouter « et les bœufs sur la tête ». Autant vouloir construire une maison en commençant par la conduite de cheminée et en construisant le reste autour.

Il faut bien réaliser que cette définition difficile à comprendre en français est proposée à des élèves sortant de collège et dont on peut imaginer, parce que l'on en parle tout le temps, le niveau en langue française !

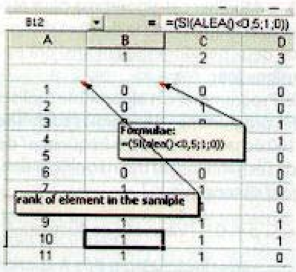
Nous laissons également imaginer les exercices déments qui sont proposés à la suite de cette définition, y compris en Anglais. Soyons ludique et « ouvert sur le monde ». Les élèves sont tellement forts et compétents qu'il est bien utile de les faire travailler dans une autre langue. C. Allègre n'avait –il pas déclaré que « L'Anglais ne doit plus être considéré comme une langue étrangère ».

English Corner

58 When a population parameter, such as a proportion, is unknown, then it is sensible to estimate it from a sample.

Definition : A **sample** is a choice of several elements of the population.

Create a sample with a spreadsheet :
We consider the population of pupils of a school.
We suppose that there are as many girls as boys in this school.



1. With a spreadsheet, create the column A of a sample of size equal to 100.

2. In column B, enter the formulae of the random result of a girl (result =1 for example) or a boy (result = 0).

3. Create 100 samples of size 100.

4. For each sample, estimate the proportion of girls into the population.

Definition : A **95 percent confidence interval** of the proportion p in the population is the interval $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ where n is the size of the sample and f is the proportion in the sample.

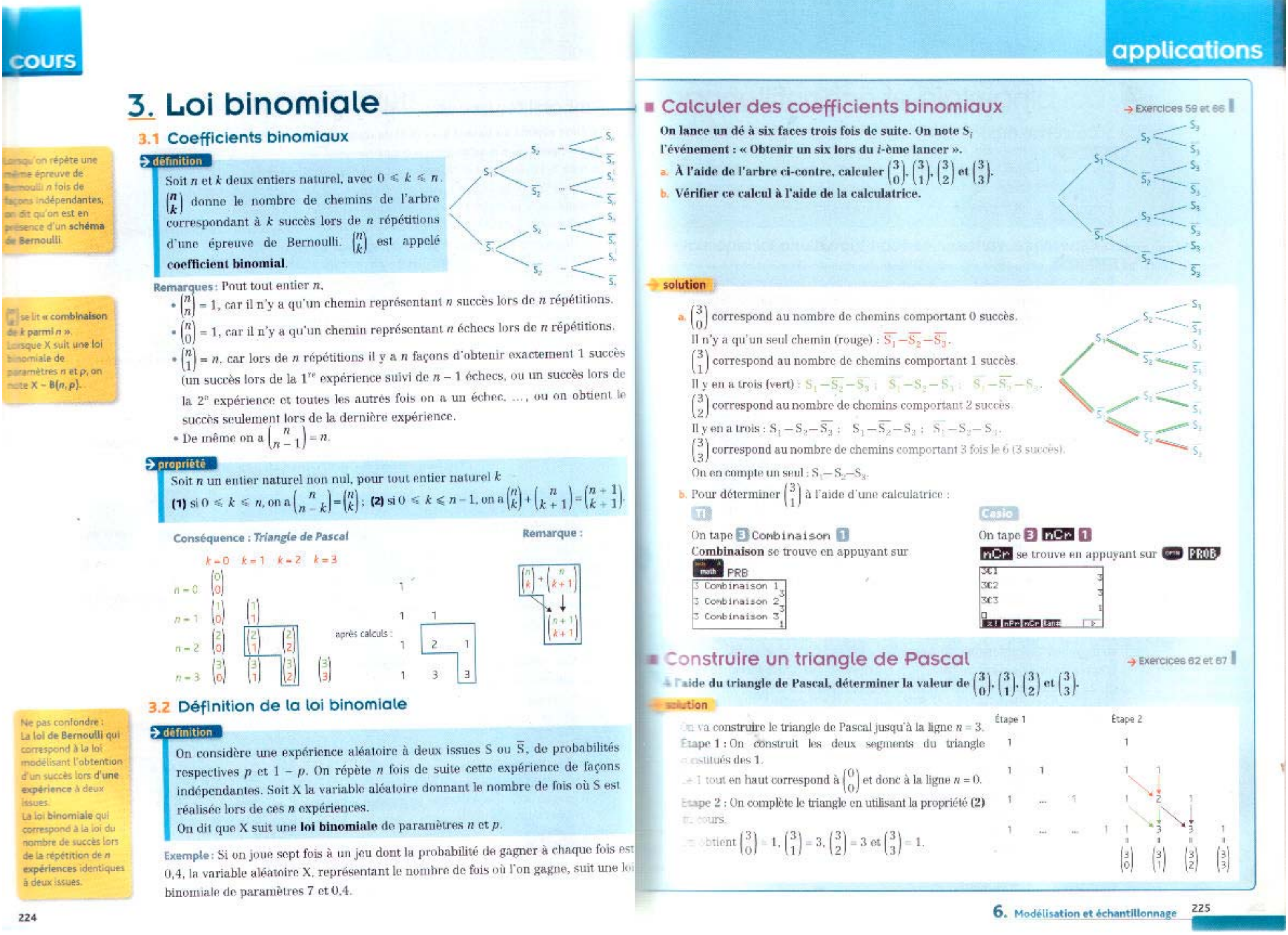
For each sample, give the 95 percent confidence interval.

Show that about 95 % of the intervals contain the average 0,5 of the whole population.

Imaginez le professeur, parce que c'est au programme, obligé de traiter cette notion dans un établissement de ZEP ! Malheureusement, il n'y a pas de quoi rire ! Par étonnant que les élèves en difficulté y restent et s'y enfoncent.

L'absurdité est poussée à un tel degré que les coefficients du binôme qui sont donc ceux qui interviennent dans la formule dite "du binôme" sont définis comme suit : nombre de chemins de k succès dans un schéma de Bernoulli :

Une telle définition est un crime ! Un crime contre tout. Contre la rigueur, la science, le savoir. C'est une fois de plus une formidable supercherie. Le moindre exercice de probabilité est infaisable sauf comme d'habitude à la calculatrice ! C'est la raison pour laquelle on ne trouve comme exemple que des cas où les entiers sont inférieurs à 4 car sinon les dessins d'arbres ne sont plus faisables. Et il en est de même des probabilités.



cours

3. Loi binomiale

3.1 Coefficients binomiaux

définition

Soit n et k deux entiers naturel, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. $\binom{n}{k}$ donne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli. $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial**.

Lorsqu'on répète une même épreuve de Bernoulli n fois de façons indépendantes, on dit qu'on est en présence d'un **schéma de Bernoulli**.

Remarques : Pour tout entier n,

- $\binom{n}{n} = 1$, car il n'y a qu'un chemin représentant n succès lors de n répétitions.
- $\binom{n}{0} = 1$, car il n'y a qu'un chemin représentant n échecs lors de n répétitions.
- $\binom{n}{1} = n$, car lors de n répétitions il y a n façons d'obtenir exactement 1 succès (un succès lors de la 1[re] expérience suivi de $n-1$ échecs, ou un succès lors de la 2[e] expérience et toutes les autres fois on a un échec, …, ou on obtient le succès seulement lors de la dernière expérience.
- De même on a $\binom{n}{n-1} = n$.

$\binom{n}{k}$ se lit « combinaison de k parmi n ». Lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on note $X \sim B(n, p)$.

propriété

Soit n un entier naturel non nul, pour tout entier naturel k

(1) si $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; **(2)** si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Conséquence : *Triangle de Pascal*

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	$\binom{0}{0}$			
$n=1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
$n=2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
$n=3$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$

après calculs :

1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

Remarque : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \to \binom{n+1}{k+1}$

3.2 Définition de la loi binomiale

définition

On considère une expérience aléatoire à deux issues S ou $\overline{S}$, de probabilités respectives p et $1-p$. On répète n fois de suite cette expérience de façons indépendantes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où S est réalisée lors de ces n expériences.

On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Ne pas confondre : La loi de Bernoulli qui correspond à la loi modélisant l'obtention d'un succès lors d'une expérience à deux issues. La loi binomiale qui correspond à la loi du nombre de succès lors de la répétition de n expériences identiques à deux issues.

Exemple : Si on joue sept fois à un jeu dont la probabilité de gagner à chaque fois est 0,4, la variable aléatoire X, représentant le nombre de fois où l'on gagne, suit une loi binomiale de paramètres 7 et 0,4.

224

applications

■ **Calculer des coefficients binomiaux** → Exercices 59 et 66

On lance un dé à six faces trois fois de suite. On note S_i l'événement : « Obtenir un six lors du i-ème lancer ».

a. À l'aide de l'arbre ci-contre, calculer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

b. Vérifier ce calcul à l'aide de la calculatrice.

solution

a. $\binom{3}{0}$ correspond au nombre de chemins comportant 0 succès.

Il n'y a qu'un seul chemin (rouge) : $\overline{S_1}-\overline{S_2}-\overline{S_3}$.

$\binom{3}{1}$ correspond au nombre de chemins comportant 1 succès.

Il y en a trois (vert) : $S_1-\overline{S_2}-\overline{S_3}$; $\overline{S_1}-S_2-\overline{S_3}$; $\overline{S_1}-\overline{S_2}-S_3$.

$\binom{3}{2}$ correspond au nombre de chemins comportant 2 succès.

Il y en a trois : $S_1-S_2-\overline{S_3}$; $S_1-\overline{S_2}-S_3$; $\overline{S_1}-S_2-S_3$.

$\binom{3}{3}$ correspond au nombre de chemins comportant 3 fois le 6 (3 succès).

On en compte un seul : $S_1-S_2-S_3$.

b. Pour déterminer $\binom{3}{1}$ à l'aide d'une calculatrice :

TI : On tape 3 Combinaison 1. **Combinaison** se trouve en appuyant sur math PRB.

Casio : On tape 3 nCr 1. **nCr** se trouve en appuyant sur OPTN PROB.

■ **Construire un triangle de Pascal** → Exercices 62 et 67

À l'aide du triangle de Pascal, déterminer la valeur de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

solution

On va construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 3$.

Étape 1 : On construit les deux segments du triangle constitués des 1.

Le 1 tout en haut correspond à $\binom{0}{0}$ et donc à la ligne $n = 0$.

Étape 2 : On complète le triangle en utilisant la propriété **(2)** du cours.

On obtient $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

6. Modélisation et échantillonnage 225

L’escroquerie permanente qui sous-tend toute cette pédagogie est de faire croire aux élèves que la définition proposée est utilisable alors qu’elle ne l’est que dans les cas hyperparticuliers et totalement triviaux qui sont proposés dans les manuels.

La notion de probabilité est vaguement définie en seconde et il n'en n'est plus question par la suite de sorte que comme pour la limite, la notion la plus fondamentale n'est définie nulle part alors que c'est la base de tout et qu'il faudrait comme c'est le cas dans tous les autres pays, la répéter à satiété.

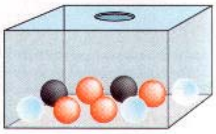
Une fois de plus les notions de bases sont totalement occultées. Le premier résultat qui donne une notion de probabilité est la formule dite de Laplace-Bayle (nbr de cas favorables)/(nbr de cas possibles) si bien que l'objet fondamental du calcul des probabilités, celui qui est à la base de tout, est cette notion de dénombrement. C'est la brique élémentaire de tout l'édifice. Et bien comme on peut s'y attendre, la France est le seul pays d'Europe à mettre autant l'accent sur les statistiques et les probabilités sans jamais invoquer la notion de dénombrement ! Toute question de dénombrement est totalement hors programme. La seule manière de faire du dénombrement est de faire une liste exhaustive de tous les cas possibles et de les compter. La fonction « factorielle » qui est la fonction fondamentale des probabilités n’est plus au programme. Elle n’est simplement que l’objet d’un exercice et encore, dans un seul des manuels que nous avons étudiés. En conséquence il est impossible de compter quoi que ce soit.

On prétend donc enseigner des probabilités, mais aucun élève n’est capable de calculer ses chances de gagner au Loto, ou bien d’avoir deux rois dans une main au poker, ce qui constituent pourtant les questions les plus simples que l’on puisse se poser.

Depuis que nous faisons des mathématiques nous avouons n’avoir jamais rencontré quelqu’un calculant une probabilité avec un arbre ! Une telle méthode doit faire se tordre de rire un élève allemand qui, lui, fait du dénombrement, tout comme les lycéens belges ou suisses :

1. Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre

Une urne contient trois boules blanches, deux boules noires et quatre boules rouges, toutes indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On recommence cette expérience deux fois de suite.
On note respectivement B_i, N_i et R_i les probabilités d'obtenir une boule blanche, une boule noire et une boule rouge lors du i-ème tirage (avec $1 \leqslant i \leqslant 2$)



1. a. Indiquer la phrase de l'énoncé qui permet d'affirmer qu'on est dans une situation d'équiprobabilité, puis calculer $p(B_1)$ et $p(N_1)$.
b. Que représente l'événement $B_1 \cup N_1 \cup R_1$?
c. Montrer que les événements B_1, N_1 et R_1 sont deux à deux incompatibles.
Déduire de ce résultat et des questions précédentes la valeur de $p(R_1)$.

MÉTHODE
Pour montrer que A, B et C sont des événements deux à deux incompatibles, on montre que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.

2. Représenter un arbre pondéré correspondant à cette expérience.
3. Déterminer la probabilité de tirer deux boules blanches lors de cette expérience.
4. Utiliser l'arbre pour déterminer la probabilité de l'événement C « Tirer deux boules de même couleur ».

solution

1. a. D'après l'énoncé, on tire une boule au hasard et les boules sont indiscernables au toucher. Chaque boule a donc autant de chances d'être tirée. On peut alors affirmer qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.
Dans l'urne, il y a 9 boules dont 3 blanches,
donc : $p(B_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$;
il y a 2 boules noires, donc $p(N_1) = \frac{2}{9}$.

INFO
Lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a :
$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas total}}$

b. L'événement $B_1 \cup N_1 \cup R_1$ correspond à « Tirer une boule blanche **ou** noire **ou** rouge lors du premier tirage ».
Cet événement est toujours réalisé, car il n'y a aucune boule d'une autre couleur dans l'urne.
Donc $B_1 \cup N_1 \cup R_1$ est l'événement certain.

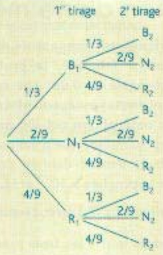
c. L'événement $B_1 \cap N_1$ correspond à « Tirer une boule blanche et une boule noire lors du premier tirage ». Ce n'est pas possible, car une boule n'a qu'une seule couleur.
Donc $B_1 \cap N_1 = \emptyset$.
Pour les mêmes raisons, $B_1 \cap N_1 = \emptyset$ et $N_1 \cap B_1 = \emptyset$.
Les événements B_1, N_1 et R_1 sont donc deux à deux incompatibles.
On en déduit que : $p(B_1 \cup N_1 \cup R_1) = p(B_1) + p(N_1) + p(R_1)$:

$$p(B_1 \cup N_1 \cup R_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + p(R_1)$$
$$= \frac{5}{9} + p(R_1)$$

INFO
Lorsque A, B et C sont des événements deux à deux incompatibles, on a :
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$

Or $p(B_1 \cup N_1 \cup R_1) = 1$, car $B_1 \cup N_1 \cup R_1$ est l'événement certain d'après la réponse 1.b.
D'où $\frac{5}{9} + p(R_1) = 1$, soit $p(R_1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

solution



2. • Lors du premier tirage, il y a trois possibilités : B_1, N_1 ou R_1.
On représente ces trois possibilités par les trois premières branches de l'arbre, elles correspondent au premier tirage.
On indique sur les branches les probabilités correspondant à chacun de ces événements, calculées précédemment.
• Lors du second tirage, et pour chacune des trois premières branches, il y a trois possibilités : B_2, N_2 ou R_2.
Ainsi, au bout de chacune des trois premières branches on a trois nouvelles branches.
Le contenu de l'urne est le même que pour le premier tirage, les probabilités sont donc inchangées :
$$p(B_2) = \frac{1}{3},\ p(N_2) = \frac{2}{9} \text{ et } p(R_2) = \frac{4}{9}.$$
On indique ces valeurs sur les branches.

3. La probabilité de tirer deux boules blanches lors de cette expérience est $p(B_1 \cap B_2)$.
Or, d'après la question précédentes, les expériences sont indépendantes, donc :
$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$
$$\text{ainsi } p(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9}.$$

4. Tirer deux boules de même couleur correspond aux événements $B_1 \cap B_2$ (deux boules blanches) ou $N_1 \cap N_2$ (deux boules noires) ou $R_1 \cap R_2$ (deux boules rouges).
Ainsi, d'après l'arbre ci-dessus, on a :
$$p(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$
$$\text{Donc } p(C) = \frac{29}{81}.$$

Entrainez-vous

L'urne contient cette fois trois boules blanches, deux boules noires et cinq boules rouges.
1. Calculer $p(B_1)$, $p(N_1)$ et $p(R_1)$.
2. Calculer la probabilité de tirer deux boules noires lors de cette expérience.
3. Utiliser l'arbre pour déterminer la probabilité de l'événement C : « Tirer deux boules de même couleur ».
4. En déduire la probabilité de l'événement D : « Tirer deux boules de couleurs différentes ».

→ On trouve
1. $p(B_1) = 0{,}3$.
$p(N_1) = 0{,}2$.
$p(R_1) = 0{,}5$.
2. $p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(N_2) = 0{,}3^2 = 0{,}09$.
3. $p(C) = 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}25 = 0{,}38$.
4. $p(D) = p(C) = 1 - p(C) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$.

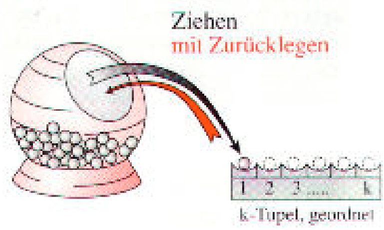
Inutile de préciser qu'à l'étranger, toutes les formules de dénombrement sont démontrées, de manière un peu théorique en Belgique et en Suisse, avec un gros travail préparatoire en Allemagne comme toujours. Il nous paraît évident qu'après un tel cours et les 6 pages d'exercices (soit 45 en Suisse et en Belgique) qui les suivent un élèves est armé pour commencer à faire de probabilités.

(Allemagne Land de Berlin)

Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Jede gezogene Kugel wird vor dem Ziehen der nächsten Kugel in die Urne **zurückgelegt**.
In diesem Fall gilt für die Anzahl N der insgesamt möglichen Ergebnisse, d. h. für die Anzahl N aller möglichen k-Tupel:

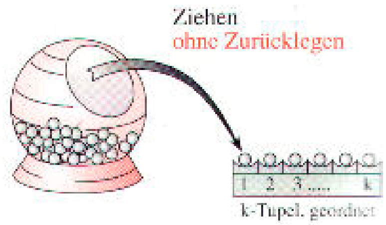
$$N = n^k$$



Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Eine gezogene Kugel wird vor dem Ziehen der nächsten Kugel **nicht zurückgelegt**. Nun gilt für die Anzahl N der insgesamt möglichen Ergebnisse (k-Tupel):

$$N = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$



Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln eine Teilmenge von k Kugeln zu entnehmen.

Eine n-elementige Menge hat genau $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ k-elementige Teilmengen.

Ziehen ohne Zurücklegen - die Reihenfolge der Kugeln wird berücksichtigt.

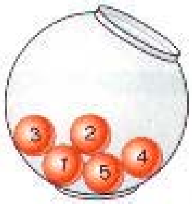


Fig. 1

An dem Diagramm in Fig. 2 kann man die möglichen Ergebnisse ablesen. Zu jeder der ersten fünf Ziehungen sind jetzt nur noch vier Kugeln als zweite Ziehung möglich, da die erste Kugel nicht zurückgelegt wird. Im Diagramm sind nur die Möglichkeiten dargestellt, bei denen die erste Kugel 2 ist.

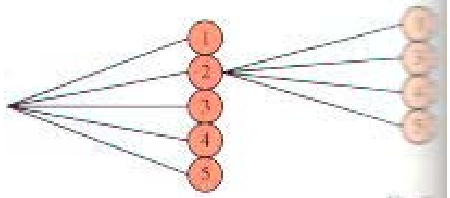


Fig. 2

S = {12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54}
Es gibt also $5 \cdot 4 = 20$ Ergebnisse.
Allgemein gilt:

> Wenn man aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln k-mal *ohne* Zurücklegen zieht und die Reihenfolge berücksichtigt, dann gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Ergebnisse.

Beachten Sie, dass man 0! = 1 setzt.

Beim Ziehen von n Kugeln ohne Zurücklegen kann man höchstens n-mal ziehen. Die Zahl der Ergebnisse in diesem Falle nennt man n! (gelesen: n **Fakultät**). Es gilt: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.
Man kann also n nummerierte Kugeln auf n! Arten anordnen.
Wegen der Umformung $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$ gilt auch:

Beim Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Ergebnisse.

Ziehen ohne Zurücklegen – die Reihenfolge der Kugeln wird nicht berücksichtigt.

Bei Berücksichtigung der Reihenfolge ergibt sich beim Ziehen von zwei Kugeln aus der Urne in Fig. 1 wie oben die Ergebnismenge {12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54}. Da aber die Reihenfolge nicht berücksichtigt werden soll, fallen von diesen Ergebnissen jeweils zwei zusammen, z.B. 12 und 21 oder 34, 43. Die Zahl der Ergebnisse halbiert sich also. Da $2 = 2!$, gibt es somit $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Ergebnisse.

Es gibt 2! = 2 Möglichkeiten, zwei Kugeln anzuordnen.

Hätte man drei Kugeln gezogen, so würden jeweils sechs Ziehungen dasselbe Ergebnis liefern, z.B. 123, 132, 213, 231, 312, 321. Das sind gerade die 3! Anordnungen der Kugeln 1, 2, 3. Allgemein liefern also bei der Ergebnismenge k! Ziehungen dasselbe Ergebnis, wenn man k Kugeln zieht. Da es mit Berücksichtigung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-k)!}$ Ziehungen gibt, erhält man ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Ergebnisse. Dafür schreibt man kurz $\binom{n}{k}$, lies n über k.

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennt man Binomialkoeffizienten. Siehe dazu Aufgabe 11.

Allgemein gilt:

> Wenn man aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln k-mal *ohne* Zurücklegen zieht und die Reihenfolge nicht berücksichtigt, dann gibt es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Ergebnisse.

Belgique

Comment dénombrer les $\left\{\begin{array}{l}\text{groupements}\\ \text{listes}\\ \text{tirages}\end{array}\right\}$ de p $\left\{\begin{array}{l}\text{éléments}\\ \text{objets}\\ \text{boules}\end{array}\right\}$ choisis

$\left\{\begin{array}{l}\text{dans un ensemble de n éléments}\\ \text{parmi n objets}\\ \text{dans une urne contenant n boules}\end{array}\right\}$?

On utilise les formules reprises dans la 4e colonne qui suit :

Type de choix	*Caractéristiques des groupements*	*Sorte de groupements*	*Nombre de groupements*
① Successif et **avec** remise;	• l'ordre importe, • les éléments peuvent se répéter, • tous les éléments ne doivent pas être choisis.	arrangements à répétitions de n éléments pris p à p.	$B_n^p = n^p$
② Successif et **sans** remise; avec $p \leqslant n$;	• l'ordre importe, • les éléments ne se répètent pas, • tous les éléments ne doivent pas être choisis.	arrangements sans répétition de n éléments pris p à p.	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
③ Successif et **sans** remise; avec $p = n$;	• l'ordre importe, • les éléments ne se répètent pas, • tous les éléments doivent être choisis.	permutations sans répétition de n éléments.	$P_n = A_n^n = n!$
④ Simultané avec $p \leqslant n$.	• l'ordre n'importe pas, • les éléments ne se répètent pas, • tous les éléments ne doivent pas être choisis.	combinaisons sans répétition de n éléments pris p à p.	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

(Suisse romande)

1.3.1 Arrangement simple

Exemple. *Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places. De combien de façons différentes peut-elle le faire ?*

1.3.2 Arrangement avec répétitions

Exemple. *Les plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactement quatre lettres de l'alphabet latin. Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ?*

1.4.1 Permutation simple

Exemple. *Combien d'anagrammes du mot LAIT (même sans signification en français) peut-on former ?*

1.4.2 Permutation avec répétitions

Exemple. *Combien d'anagrammes du mot NONNE (même sans signification en français) peut-on former ?*

1.5.1 Combinaison simple

Exemple. *Combien de mains différentes y a-t-il dans le jeu de poker ?*

La démence pure, le caractère purement idéologique de cette pédagogie devient particulièrement prégnant lorsque l'on sait que les dénombrements sont rentrés au programme de classes préparatoires. Autrement dit, les bases du calculs des probabilités qui devraient être données en lycée ne sont données qu'au niveau supérieur tandis qu'au niveau inférieur on « fait » des probabilités mais sans aucune base !

La monstruosité de ce programme de probabilité apparaît au grand jour lorsque l'on voit surgir en Terminale des notions qui ne font pas partie des programmes de CPGE : les probabilités continues, les intervalles de confiance et de fluctuation

Commençons par ces derniers.

DÉFINITION X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.
α est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$ et a, b des nombres réels.
Dire que $[a\,;b]$ est **un intervalle de fluctuation de X au seuil $1-\alpha$** signifie que :

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha.$$

Remarque : Les intervalles de fluctuation introduits en classes de Seconde et Première entrent dans le cadre plus général de cette définition.

Intervalle de fluctuation asymptotique

PROPRIÉTÉ Si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec p dans l'intervalle $]0\,;1[$, alors pour tout nombre réel α de $]0\,;1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha \quad \text{où} \quad \mathrm{I}_n = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

et u_α désigne le nombre réel tel que $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

DÉMONSTRATION

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

D'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha)$.

Or $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = \mathrm{P}\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$

$$= \mathrm{P}\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\dfrac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

èmes et définition Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, et α un réel tel que $0<\alpha<1$.
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$, on appelle u_α l'unique réel tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha.$$

- On appelle I_n l'intervalle :

$$\mathrm{I}_n = \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Alors : $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in \mathbf{I}_n\right) = 1-\alpha.$$

- L'intervalle I_n contient la fréquence $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ avec une probabilité qui se rapproche de $1-\alpha$ lorsque n augmente : on dit que c'est un **intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1-\alpha$**.

Voir la **démonstration** à l'exercice résolu 9, page 415. démo BAC

Nous venons de montrer à quel point les notions les plus élémentaires de probabilité ne sont absolument pas enseignées. Comme d'habitude dans l 'enseignement français d'aujourd'hui, il n'y a que des formules toute faites, dont on ne sait pas d'où elles viennent et bien entendu que l'on applique avec … la calculatrice !

Et bien c'est sur ce sable que l'on prétend faire faire aux élèves des probabilités continues dans ce qu'elles ont de plus difficiles : les intervalles de confiance et de fluctuation. Précisons ici qu'un intervalle de confiance ou de fluctuation est une sorte de «probabilité d'une probabilité». Cette notion quantifie le problème : « avec quelle probabilité p va-t-on obtenir la probabilité q dans une expérience statistique » ? On mesure le degré d'abstraction que cette notion exige et qui fait qu'elle ne soit enseignée au niveau universitaire qu'après des mois de cours spécialisé sur le sujet.

Il suffit de lire la définition ci-contre pour mesurer la folie furieuse, le *delirium tremens* qui a atteint l'Inspection Générale de Mathématiques :

Rappelons que les élèves qui doivent ingurgiter cette définition ne sont pas capables pour la plupart de résoudre une équation du second degré (c'est ce que nous constatons tous les ans dans notre classe prépa).

Nous disions plus haut que les mathématiques ne sont plus une discipline faisant l'objet d'un apprentissage. Comment s'en étonner ? Qui peut retenir de pareilles propriétés ? de telles définitions ?

Ces pages sont tout simplement incompréhensibles à ce niveau d'étude. Elles ont beau figurer dans un manuel, le niveau n'en monte pas pour autant.

Ce que l'on présente comme un cours est au plus un résumé d'un UV de probabilité de six mois en université.

Ce qui est liquidé ici en 10 lignes, le passage de la loi binomiale à la loi normale, fait l'objet de quatre pages d'explications chez Klett, où l'on ne cherche pas à faire savant en jonglant avec le vocabulaire des lois à densité comme en France mais où l'on prend le temps d'expliquer un point crucial de probabilité : le passage du discret au continue.

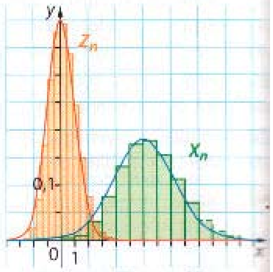
4 Loi normale centrée réduite

a Théorème de Moivre-Laplace

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. Si on fixe la valeur de p et que l'on fait augmenter n, l'histogramme représentant les valeurs prises par X_n semble se rapprocher d'une « courbe en cloche » (tracé vert ci-contre). Si p varie, la « courbe en cloche » change de caractéristiques (hauteur, étalement).

En revanche, si on considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on s'aperçoit que, quelle que soit la valeur de p choisie, la « courbe en cloche » associée à Z_n semble toujours la même (hauteur, étalement, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) (tracé orange ci-contre).

Ce phénomène illustre une propriété de probabilité : le théorème de Moivre-Laplace.



$n = 30,\ p = 0{,}2$

Théorème de Moivre-Laplace Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. On pose $\boldsymbol{Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}$. Pour tous réels a et b, avec $a < b$, on a : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Voir le TP 15, page 374.

b La loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

Propriété (admise) et définition

- Si $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$, alors :

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

La fonction f permet de définir une **densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.**

- **La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$** est la loi de probabilité **ayant pour densité la fonction** f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Propriété 1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$. On définit alors **l'espérance de X** par :

$$E(X) = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,f(t)\,dt + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y t\,f(t)\,dt,$$

ainsi que **la variance** par : $\boldsymbol{V(X) = E(X - E(X))^2}$.

On a alors : $\boldsymbol{E(X) = 0}$ et on admet que $\boldsymbol{V(X) = 1}$.

DÉMONSTRATION

$$\int_x^0 t\,f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^0 t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-1 + e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Et, de manière analogue : $\displaystyle\int_0^y f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{y^2}{2}} + 1\right)$.

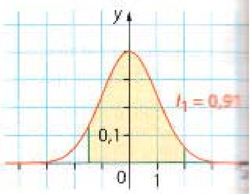
D'où : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,f(t)\,dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Ainsi $E(X) = 0$.

Commentaire

La fonction f est paire. Sa courbe est donc symétrique par rapport à $(y'Oy)$.

De plus, on ne connaît pas de primitive « explicite » de la fonction f. La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.



Exemple :
$P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0{,}91$.